

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

**БИЛЕТЫ
ПИСЬМЕННЫХ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ
ЭКЗАМЕНОВ В МФТИ (2001 г.)**

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ
ПО ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

МОСКВА 2001

УДК 53 (075)
ББК 22 3

Билеты письменных вступительных экзаменов в МФТИ
(2001 г.) Методические разработки по физике и математике
— М. МФТИ, 2001 — 63 с

Приведены задания, предлагавшиеся на вступительных экзаменах абитуриентам Московского физико-технического института в 2001 году. Все задачи снабжены ответами, часть — подробными решениями, некоторые — основными указаниями к решению. На выполнение каждой экзаменационной работы давалось 4,5 часа.

Для абитуриентов МФТИ и других физических вузов, а также преподавателей школ с углубленным изучением физики и математики.

Авторы задач

по физике

доценты Чешев Ю. В., Можаяев В. В.,
Шеронов А. А., Чивилев В. И.

по математике

проф. Шабунин М. И.,
доценты Бунаков А. Э., Трушин В. Б.,
к. ф. м. н. Балашов М. В.,
к. ф. м. н. Константинов Р. В.

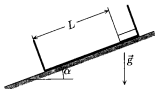
© Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2001

© Коллектив авторов, 2001

Ф И З И К А

БИЛЕТ 1

1. Ящик с шайбой удерживают в покое на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$ (см рис.) Ящик и шайбу одновременно отпускают и ящик начинает скользить по наклонной плоскости,



к задаче 1

- а шайба — по дну ящика. Через время $t = 1$ с шайба ударяется о нижнюю стенку ящика. Коэффициент трения скольжения между шайбой и ящиком $\mu_1 = 0,23$, а между ящиком и наклонной плоскостью $\mu_2 = 0,27$. Масса ящика вдвое больше массы шайбы. 1) Определить ускорение шайбы относительно наклонной плоскости при скольжении шайбы по ящику. 2) На каком расстоянии L от нижней стенки ящика находилась шайба до начала движения?

2. В цилиндре под поршнем находятся 0,5 моля воды и 0,5 моля пара. Жидкость и пар медленно нагревают в изобарическом процессе, так что в конечном состоянии температура пара увеличивается на ΔT градусов. Сколько тепла было подведено к системе «жидкость-пар» в этом процессе? Молярная теплота испарения жидкости в заданном процессе равна Λ . Внутренняя энергия ν молей пара равна $U = \nu \cdot 3RT$ (R — газовая постоянная).

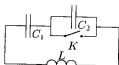
3. Батарея с ЭДС \mathcal{E} подключена к удерживаемым неподвижно пластинам 1 и 3 плоского конденсатора. Площадь пластин S , расстояние между ними d . Посредине между этими пластинами расположена закрепленная неподвижно металлическая пластина 2, на которой



к задаче 3

- находится заряд Q . Пластины 1 отпускают. Какую работу совершит батарея к моменту соударения пластин 1 и 2? Силой тяжести и внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

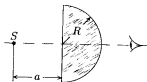
4. При замкнутом ключе K в LC контуре (см. рис.) происходят незатухающие свободные колебания тока. В тот момент,



к задаче 4

когда напряжение на конденсаторе C_1 максимально и равно U_1 , ключ размыкают. Определить максимальное значение тока в контуре после размыкания ключа. Параметры элементов схемы указаны на рисунке.

5. Из стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1,5$



к задаче 5

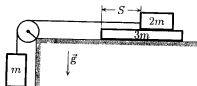
вырезали толстую линзу в форме полушара радиусом $R = 10$ см. Через такую линзу рассматривается точечный источник света S , расположенный на расстоянии $a = R/2$ от плоской поверхности полушара. На каком расстоянии

от этой поверхности наблюдатель видит изображение источника света?

У к а з а н и е Для малых углов α $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$

БИЛЕТ 2

1. Систему из груза массой m , бруска массой $2m$ и доски массой $3m$ удерживают в покое (см. рис.). Брусок находится на



к задаче 1

расстоянии $S = 49$ см от края доски. Систему отпускают, и брусок движется по доске, а доска — по горизонтальной поверхности стола. Коэффициент трения скольжения между бруском и доской

$\mu_1 = 0,35$, а между доской и столом $\mu_2 = 0,10$. 1) Определить ускорение бруска относительно стола при движении бруска по доске. 2) Через какое время брусок достигнет края доски? Считать, что за время опыта доска не достигает блока.

Массу нити, блока и трение в оси блока не учитывать

2. В цилиндре под поршнем находится один моль ненасыщенного пара при температуре T . Пар сжимают в изотермическом процессе, так что в конечном состоянии половина его массы сконденсировалась, а объем пара уменьшился в $k = 4$ раза. Найти молярную теплоту конденсации пара, если в указанном процессе от системы «жидкость–пар» пришлось отвести количество теплоты Q ($Q > 0$)

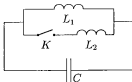
У к а з а н и е пар можно считать идеальным газом. Работа, совершаемая в изотермическом процессе ν молями пара при расширении от объема V_1 до V_2 равна $\nu RT \ln(V_2/V_1)$

3. Одну из пластин плоского конденсатора, заряженную положительным зарядом q_1 , удерживают на расстоянии d от другой закрепленной пластины с отрицательным зарядом q_2 . Площадь каждой пластины S . Верхнюю пластину массой M отпускают. Чему будет равна ее скорость после абсолютно упругого отскока на прежнее расстояние d ?



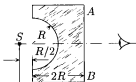
к задаче 3

4. При разомкнутом ключе K в LC -контуре (см. рис.) происходят незатухающие свободные колебания тока. В тот момент, когда ток в цепи максимален и равен I_0 , замыкают ключ K . Определить максимальное напряжение на конденсаторе после замыкания ключа. Параметры схемы указаны на рисунке



к задаче 4

5. В стеклянной пластине толщиной $a = 2R$ вырезана половина шара радиуса $R = 10$ см. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Наблюдатель рассматривает через получившуюся толстую линзу точечный источник света S , распо-



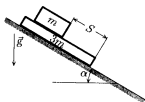
к задаче 5

ложенный на расстоянии $5R/2$ от плоской поверхности AB (см. рис.). На каком расстоянии от поверхности AB он видит изображение источника?

У к а з а н и е для малых углов α $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$

БИЛЕТ 3

1. Доску с находящимся на ней бруском удерживают в покое



к задаче 1

на наклонной плоскости с углом наклона к горизонту $\alpha = 60^\circ$ (см. рис.). Расстояние от бруска до края доски $S = 49$ см. Доску и брусок одновременно отпускают, и доска начинает скользить по наклонной плоскости, а брусок по доске. Коэффициент трения скольжения между бруском и

доской $\mu_1 = 0,30$, а между доской и наклонной плоскостью $\mu_2 = 0,40$. Масса доски в три раза больше массы бруска. 1) Определить ускорение бруска относительно наклонной плоскости при скольжении бруска по доске. 2) Через какое время брусок достигнет края доски?

2. В цилиндре под поршнем находится половина моля ненасыщенного пара. Содержимое цилиндра медленно охлаждают в изобарическом процессе, так что часть пара конденсируется ($\nu_{\text{ж}} = 1/3$), а температура внутри цилиндра уменьшается на ΔT ($\Delta T > 0$). Определить молярную теплоту конденсации пара, если в этом процессе пришлось отвести от содержимого цилиндра количество тепла Q ($Q > 0$). Пар можно считать идеальным газом с внутренней энергией ν молей $U = \nu \cdot 3RT$.

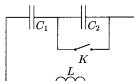
3. К неподвижным пластинам 1 и 2 плоского конденсатора подключена батарея с ЭДС \mathcal{E} . К пластине 1 прижата проводящая пластина 3. Пластины 3 отпускают, и она начинает двигаться к пластине 2. Какую работу совершит батарея за время перемещения пластины 3 от пластины 1 к пластине 2, если площадь каждой пластины равна S , а начальное расстояние

между пластинами 2 и 3 равно d ? Силой тяжести пренебречь



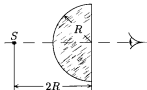
4. В колебательном контуре, изображенном на рисунке, происходят свободные колебания при замкнутом ключе K . В тот момент, когда напряжение на конденсаторе C_1 достигает максимального значения и равно V_0 , ключ размыкают. Определить величину тока в контуре в тот момент, когда напряжение на конденсаторе C_1 будет равно нулю при условии, что $C_2 > C_1$

к задаче 3



к задаче 4

5. Из стеклянной пластинки с показателем преломления $n = 1,5$ вырезали толстую линзу в форме полушара радиусом $R = 10$ см. Через такую линзу рассматривается точечный источник света S , расположенный на расстоянии $a = 2R$ от плоской поверхности полушара. На каком расстоянии от этой поверхности наблюдатель видит источник света?

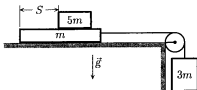


к задаче 5

У к а з а н и е для малых углов α $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$

БИЛЕТ 4

1. Систему из доски массой m , бруска массой $5m$ и груза массой $3m$ удерживают в покое (см. рис.). Затем систему отпускают, и доска движется по горизонтальной поверхности стола, а брусок движется по доске. Через время $t = 1,4$ с



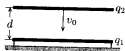
к задаче 1

брусек достигает края доски, а доска еще не доходит до блока. Коэффициент трения скольжения бруска о доску $\mu_1 = 0,10$, а доски о стол $\mu_2 = 0,30$. 1) Определить ускорение бруска относительно стола при движении бруска по доске. 2) На каком расстоянии от края доски находился брусек до начала движения? Массу нити, блока и трение в оси блока не учитывать.

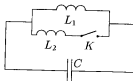
2. В цилиндре под поршнем находятся один моль воды и один моль пара при температуре T . К содержимому цилиндра подводится тепло в изотермическом процессе, так что объем, занимаемый паром в конечном состоянии увеличивается в $k = 3$ раза. Найти количество теплоты, подведенной в этом процессе. Молярная теплота испарения жидкости при указанной температуре равна Λ . Газовая постоянная — R . Объемом, занимаемым жидкостью вначале, пренебречь. Пар можно считать идеальным газом.

У к а з а н и е. Работа, совершаемая ν молями пара в изотермическом процессе при расширении от объема V_1 до объема V_2 , равна $\nu RT \ln(V_2/V_1)$.

3. Одна из пластин плоского конденсатора, на которой находится заряд q , неподвижно закреплена на непроводящей плите. Вторая пластина с зарядом q и массой M удерживается на расстоянии d от нее. Площадь каждой пластины S . Верхней пластине сообщают такую начальную скорость v , что она долетает до нижней пластины и после абсолютно упругого удара отскакивает от нее. Чему будет равна скорость этой пластины, когда она снова будет находиться на расстоянии d от нижней пластины?



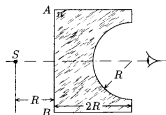
к задаче 3



к задаче 4

4. В колебательном контуре, изображенном на рисунке, происходят свободные колебания при разомкнутом ключе K . В тот момент, когда ток в катушке индуктивностью L достигает максимального значения, равного I_0 , ключ размыкают. Определить величину напряжения на конденсаторе в тот момент, когда ток через катушку L будет равен нулю при условии, что $L_2 > L_1$.

5. В стеклянной пластине толщиной $a = 2R$ вырезана половина шара радиуса $R = 10$ см. Показатель преломления стекла $n = 1,5$. Наблюдатель рассматривает через получившуюся толстую линзу точечный источник света S , расположенный на расстоянии R от плоской поверхности AB (см. рис.). На каком расстоянии от поверхности AB он видит изображение источника?

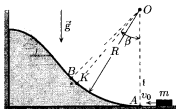


к задаче 5

У к а з а н и е для малых углов α $\operatorname{tg} \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha$

БИЛЕТ 5

1. На гладкой горизонтальной поверхности стола постоит горка, упирающаяся в гладкую вертикальную стенку (см. рис.). Участок AB профиля горки — дуга окружности радиусом R . По направлению к горке движется со скоростью U небольшая по сравнению с размерами горки монета массой m . Монета въезжает на горку, движется по горке без трения, не отрываясь от нее, и достигает точки K , продолжая движение. Радиус OK составляет с вертикалью угол

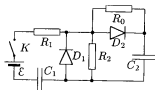


к задаче 1

β ($\cos \gamma = 5/7$) 1) Найти скорость монеты в точке K 2) Найти силу давления горки на стенку в момент прохождения монетой точки K

2. Температура гелия увеличивается в $k = 1,5$ раза в процессе $PV^2 = \text{const}$ (P — давление газа, V — его объем) При этом внутренняя энергия газа изменилась на $\Delta U = 300$ Дж Найти 1) минимальное давление P_{\min} , 2) начальный объем газа V_1 Максимальное давление, которое было у газа в этом процессе, составило $P_{\max} = 9 \cdot 10^5$ Па

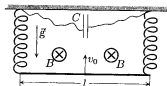
3. В электрической цепи, представленной на рисунке, диоды D_1



к задаче 3

и D_2 идеальные. Считая параметры элементов цепи известными, определить 1) ток через батарею сразу после замыкания ключа K , 2) количество теплоты, выделившееся в схеме после замыкания ключа K . Внутренним сопротивлением батареи пренебречь

4. Проводник массой M и длиной l подвешен к непроводящему потолку за концы с помощью двух одинаковых проводящих пружин, каждая жесткостью k . К верхним концам пружин подсоединен конденсатор емкостью C . Вся конструкция висит в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной плоскости конструкции. Проводник сместили и отпустили. При прохождении положения равновесия скорость проводника оказалась равной v_0 . Определить максимальную высоту подъема проводника от положения равновесия. Сопротивлением и самоиндукцией проводников пренебречь



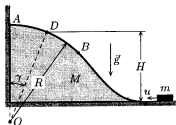
к задаче 4

5. Точечный источник света находится на главной оптической

оси на расстоянии $a = 40$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 8$ см. Источник сместили вверх на расстояние $h = 5$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение источника вернулось в старое положение?

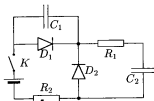
БИЛЕТ 6

1. На гладкой горизонтальной поверхности стола постоит горка массой M , упирающаяся в гладкую вертикальную стенку (см. рис.). Участок AB профиля горки — дуга окружности радиусом R . По направлению к горке движется со скоростью U



к задаче 1

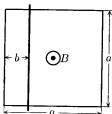
- небольшой по сравнению с размерами горки брусок массой m . Брусок въезжает на горку и движется по горке без трения, не отрываясь от нее, и достигает точки D на высоте $H = R/2$, продолжая движение. Радиус OD составляет с вертикалью угол γ ($\cos \gamma = 3/4$).
1) Найти скорость бруска в точке D .
2) Найти силу давления горки на стол в момент прохождения бруском точки D .
2. Температура гелия уменьшается в $k = 2$ раза в процессе $P^2V = \text{const}$ (P — давление, V — объем газа). Найти 1) начальный объем газа V_1 , 2) изменение его внутренней энергии в процессе охлаждения. Начальное давление газа $P_1 = 10$ Па, а минимальный объем, который он занимал в процессе охлаждения, составил $V_{\min} = 1$ л.
3. В электрической цепи, представленной на рисунке, диоды



к задаче 3

D_1 и D_2 идеальные. Известные параметры элементов цепи указаны на рисунке 1) Определить ЭДС батареи, если ток через нее сразу после замыкания ключа K равен I_0 2) Определить количество теплоты, выделившейся в схеме после замыкания ключа K . Внутренним сопротивлением батареи пренебречь

4. На горизонтальной поверхности стола закреплена тонкая неподвижная проводящая квадратная рамка со стороной a



к задаче 4

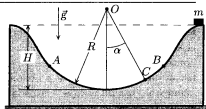
На рамке симметрично лежит стержень параллельно боковым сторонам рамки на расстоянии $b = a/4$. Рамка и стержень изготовлены из одного куска провода, омическое сопротивление единицы длины которого равно ρ . В некоторый момент включается однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки. Какую скорость приобретет стержень за время установления магнитного поля, если установившееся значение индукции равно B_0 ? Смещением стержня за время установления магнитного поля пренебречь. Трение не учитывать. Масса стержня M .

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $d = 40$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см. Источник сместили вверх на расстояние $h = 5$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение источника вернулось в старое положение?

БИЛЕТ 7

1. На горизонтальной поверхности стола покоится чаша с небольшой по сравнению с размерами чаши шайбой массой m (см. рис.). Нижняя часть AB внутренней поверхности чаши есть часть сферы радиусом R . Глубина чаши $H = 3R/5$, ее внутренняя поверхность гладкая. Шайба начинает скользить

без начальной скорости и при движении не отрывается от чаши, а чаша остается в покое. Шайба достигает точки C , для которой угол между радиусом OC и вертикалью

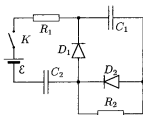


к задаче 1

равен α ($\cos \alpha = 4/5$). 1) Найти скорость шайбы в точке C . 2) Найти силу трения между чашей и столом при прохождении шайбой точки C .

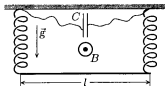
2. Температура гелия уменьшается в $k = 3$ раза в процессе $PV^2 = \text{const}$ (P — давление газа, V — его объем). При этом его внутренняя энергия изменилась на величину, равную 50 Дж. Найти 1) максимальное давление газа P_{max} , 2) величину объема газа V_k в конечном состоянии. Минимальное давление газа в этом процессе составило $P_{\text{min}} = 10^5$ Па.

3. В электрической цепи, представленной на рисунке, диоды D_1 и D_2 идеальные. Считая параметры элементов цепи известными, определить 1) ток через батарею сразу после замыкания ключа K , 2) найти количество теплоты, выделившейся в схеме после замыкания ключа K . Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



к задаче 3

4. Проводник массой M и длиной l подвешен к непроводящему потолку за концы с помощью двух одинаковых проводящих пружин, каждая жесткостью k . К верхним концам пружин подсоединен конденсатор емко-



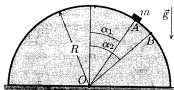
к задаче 4

стью C . Вся конструкция висит в однородном магнитном поле с индукцией B , перпендикулярной плоскости конструкции. Проводник смещают вниз на расстояние h от положения равновесия, а затем отпускают. Определить скорость проводника, когда он снова окажется в положении равновесия. Сопротивлением и самоиндукцией проводников пренебречь.

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $a = 8$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см. Источник сместили вниз на расстояние $h = 4$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение источника вернулось в старое положение?

БИЛЕТ 8

1. Полушар радиусом R покоится на горизонтальной поверхности стола. В точку A на полушаре помещают небольшую по



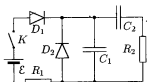
к задаче 1

сравнению с размерами полушара шайбу массой m и отпускают (см рис). Шайба скользит без трения и оказывается в точке B , а полушар при этом остается неподвижным. Радиусы OA и OB составляют с вертикалью углы

α_1 и α_2 такие, что $\cos \alpha_1 = 5/6$, $\cos \alpha_2 = 2/3$. 1) Найти скорость шайбы в точке B . 2) Найти силу трения между полушаром и столом при прохождении шайбой точки B .

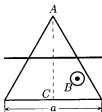
2. Температура гелия увеличилась в $k = 3$ раза в процессе $P^2V = \text{const}$ (P — давление, V — объем газа), а его внутренняя энергия изменилась на 100 Дж. Найти 1) начальный объем V_1 газа, 2) начальное давление P_1 газа. Максимальный объем, который занимал газ в процессе нагрева, равнялся $V_{\text{max}} = 3$ л.
3. В электрической цепи, представленной на рисунке, диоды D_1 и D_2 идеальные. Известные параметры элементов электрической цепи указаны на рисунке. 1) Определить ЭДС батареи,

если ток через нее сразу после замыкания ключа K равен I_0 2) Определить количество теплоты, выделившейся в схеме, после замыкания ключа K Внутренним сопротивлением батареи пренебречь



к задаче 3

4. На горизонтальной поверхности стола закреплена тонкая проводящая рамка в виде равностороннего треугольника со стороной a . На рамке лежит стержень, который параллелен основанию треугольника, а середина стержня находится на середине высоты AC . Рамка и стержень изготовлены из одного куска провода, омическое сопротивление единицы длины которого равно ρ . В некоторый момент включается однородное магнитное поле, вектор индукции которого перпендикулярен плоскости рамки. Какую скорость приобретает стержень за время установления магнитного поля, если установившееся значение индукции равно B_0 ? Смещением стержня за время установления магнитного поля пренебречь. Трение не учитывать. Масса стержня M .

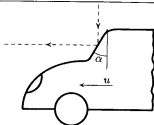


к задаче 4

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси на расстоянии $a = 60$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = -15$ см. Линзу сместили вверх на расстояние $L = 2$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить источник, чтобы его изображение вернулось в старое положение?

БИЛЕТ 9

1. Во время града автомобиль едет со скоростью $v = 25$ км/час по горизонтальной дороге. Одна из градин ударяется о переднее (ветровое) стекло автомобиля, наклоненное под углом

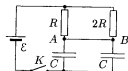


к задаче 1

$\alpha = 30^\circ$ к вертикали, и отскакивает горизонтально в направлении движения автомобиля (см рис). Считая, что удар градины о стекло абсолютно упругий и что скорость градины непосредственно перед ударом вертикальна, найти скорость градины 1) до удара, 2) после удара

2. Легкий подвижный теплопроводящий поршень делит объем вертикально расположенного замкнутого цилиндра на две части. В нижней части под поршнем находятся в равновесии жидкость и ее пар, температура которых поддерживается постоянной и равной T_0 . В верхней части цилиндра над поршнем находится газообразный гелий. К гелию квазистатически подводится некоторое количество теплоты, и он совершает работу A . При этом часть пара сконденсировалась, и от пара с водой пришлось отвести количество теплоты Q . 1) Какое количество теплоты было подведено к гелию? 2) Найти удельную теплоту испарения жидкости. Молярная масса пара μ . Трением и теплоемкостью поршня пренебречь. Считать, что объем жидкости значительно меньше объема образовавшегося из нее пара.

3. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсаторы не заряжены. Какой заряд протечет через перемычку AB после замыкания ключа K ? Сопротивлением перемычки пренебречь. Параметры схемы указаны на рисунке.



к задаче 3

4. С помощью рассеивающей линзы получено изображение спички, расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 1/2$. По другую сторону линзы на

расстоянии $a = 9$ см от нее перпендикулярно главной оптической оси линзы установили плоское зеркало. Изображение спички в системе «линза-зеркало» получилось с увеличением $\Gamma = 1/4$. Определить фокусное расстояние линзы.

5. На деталь космического аппарата в форме прямого кругового конуса с радиусом основания $R = 20$ см и образующей $L = 25$ см падает солнечный свет параллельно оси конуса (см. рис.). Интенсивность света (мощность, проходящая через единицу площади плоской поверхности, ориентированной перпендикулярно световым лучам)

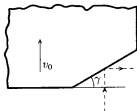


к задаче 5

$I = 1,4$ кВт/м². С какой силой свет действует на деталь? Считать, что деталь отражает свет зеркально и полностью.

БИЛЕТ 10

1. Массивная плита поднимается вверх с постоянной скоростью. Мяч, брошенный вертикально вверх, нагоняет плиту, ударяется абсолютно упруго о боковую поверхность плиты, наклоненную под углом $\gamma = 30^\circ$ к горизонту, и отскакивает в горизонтальном направлении со скоростью $V_2 =$



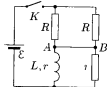
к задаче 1

$= 1,7$ м/с (см. рис.). 1) Найти скорость плиты V_0 . 2) Найти скорость V_1 мяча непосредственно перед ударом. Масса плиты намного больше массы мяча.

2. Легкий подвижный теплонепроницаемый поршень делит объем вертикально расположенного замкнутого цилиндра на две части. В нижней части под поршнем находятся в равновесии пар и вода, температура которых поддерживается постоянной и равной T_0 . Над поршнем находится ν молей газообразного гелия. К гелию подвели квазистатически количество теплоты Q . В результате его температура увеличилась, а часть па-

ра сконденсировалась 1) Найти изменение температуры гелия 2) Сколько теплоты необходимо при этом отвести от пара и воды? Удельная теплота испарения воды λ , молярная масса пара μ Трением и теплоемкостью поршня пренебречь Считать, что объем сконденсировавшегося пара значительно больше объема образовавшейся из него воды

3. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ



к задаче 3

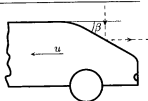
K разомкнут Катушка с индуктивностью L обладает омическим сопротивлением r Какой заряд протечет через перемычку AB после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением перемычки пренебречь Параметры схемы указаны на рисунке

4. С помощью положительной линзы с фокусным расстоянием $F = 15$ см получено мнимое изображение иглой, расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 2$ По другую сторону линзы перпендикулярно ее главной оптической оси установили плоское зеркало Изображение иглой в системе «линза-зеркало» получилось с увеличением $\Gamma_2 = 3$ Определить расстояние от линзы до зеркала
5. На полупрозрачное зеркало площадью $S = 100$ см², находящееся на орбите искусственного спутника Земли, падают солнечные лучи перпендикулярно поверхности зеркала Зеркало отражает в обратном направлении 30% и пропускает в прямом направлении 20% энергии падающего света, а остальную энергию поглощает Найти силу, действующую на зеркало со стороны света Расстояние от Земли (зеркала) до Солнца $R = 150 \cdot 10^6$ км Мощность излучения Солнца $N = 3,910^{26}$ Вт

БИЛЕТ 11

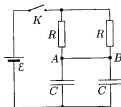
1. Идет град, и автомобиль едет со скоростью $U = 29$ км/час по горизонтальной дороге Одна из градин ударяется о стекло заднего окна автомобиля, наклоненное под углом $\beta = 30^\circ$ к

горизонту, и отскакивает горизонтально в направлении, противоположном движению автомобиля (см. рис.). Считая, что удар градины о стекло абсолютно упругий и что ее скорость непосредственно перед ударом вертикальна, найти скорость градины 1) до удара, 2) после удара

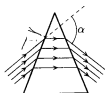


к задаче 1

2. Легкий неподвижный теплопроводящий поршень делит объем вертикально расположенного замкнутого цилиндра на две части. Под поршнем находятся в равновесии жидкость и ее пар, температура которых поддерживается постоянной и равной T_0 . Над поршнем находится газообразный гелий. К жидкости и пару подводится квазистатически количество теплоты Q . При этом часть жидкости испаряется, и пар совершает механическую работу A . 1) Найти удельную теплоту испарения жидкости. 2) Сколько теплоты пришлось отвести от гелия? Молярная масса пара μ . Теплоемкостью поршня и трением пренебречь. Считать, что объем жидкости значительно меньше объема образовавшегося из нее пара.
3. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсаторы не заряжены. Какой заряд протечет через перемычку AB после замыкания ключа K ? Сопротивлением перемычки пренебречь. Параметры схемы указаны на рисунке.



к задаче 3

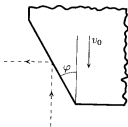


к задаче 5

4. С помощью рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F = 12$ см получено изображение гвоздика, расположенного перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 1/3$. По другую сторону линзы перпендикулярно ее главной оптической оси установили плоское зеркало. Изображение гвоздика в системе «линза-зеркало» получилось с увеличением $\Gamma = 1/6$. Определить расстояние от линзы до зеркала.
5. Призма (см. рис.) отклоняет параллельный пучок света на угол α ($\cos \alpha = 7/9$). Мощность пучка $N = 30$ Вт. Найти силу, с которой свет действует на призму. Отражением и поглощением света призмой пренебречь.

БИЛЕТ 12

1. Кабина подъемника движется вертикально вниз с постоянной скоростью. В боковую стенку кабины, наклоненную под



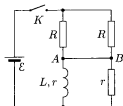
к задаче 1

углом $\varphi = 30^\circ$ к вертикали, попадает брошенный вертикально вверх мяч (см. рис.). После абсолютно упругого удара мяч отскакивает в горизонтальном направлении со скоростью $V_2 = 3,4$ м/с. 1) Найти скорость кабины V_0 . 2) Найти скорость мяча V_1 непосредственно перед ударом. Масса кабины намного больше массы мяча.

2. Легкий неподвижный теплопроводящий поршень делит объем вертикально расположенного замкнутого цилиндра на две части. Под поршнем в нижней части цилиндра находится в равновесии вода и пар, температура которых поддерживается постоянной и равной T_0 . В верхней части цилиндра над поршнем находится газообразный гелий. 1) Какое количество теплоты надо подвести квазистатически к пару и воде, чтобы часть воды массой Δm испарилась? 2) Сколько тепла необходимо при этом отвести от гелия? Удельная теплота

испарения воды λ , молярная масса пара μ . Трением и теплоемкостью поршня пренебречь. Считать, что объем пара значительно больше объема воды, из которой он образовался.

3. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут. Катушка с индуктивностью L обладает омическим сопротивлением r . Какой заряд протечет через перемычку AB после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением перемычки пренебречь. Параметры схемы указаны на рисунке.



к задаче 3

4. С помощью положительной линзы на экране получено изображение булавки, расположенной перпендикулярно главной оптической оси линзы, с увеличением $\Gamma_1 = 1$. Между линзой и экраном на расстоянии $a = 10$ см от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси установили плоское зеркало. Изображение булавки в системе «линза–зеркало» получилось с увеличением $\Gamma = 2$. Определить фокусное расстояние линзы.
5. Лампочка излучает изотропно световую энергию мощностью $N = 40$ Вт. На расстоянии $R = 1$ м от лампочки, перпендикулярно световым лучам, расположено небольшое полупрозрачное зеркальце площадью $S = 1$ см². Зеркальце отражает в обратном направлении 20% и поглощает 30% энергии падающего света, а остальную энергию пропускает в прямом направлении. С какой силой свет действует на зеркальце?

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x+y+1} + 7 \cdot 3^{y-2} = 8, \\ \sqrt{x+y^2} = x+y \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\sin x} + \sin^2 x \cos 3x = 6 \cos 2x \cos^2 x$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 - x - 2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

4. Через точку A проведены две прямые одна из них касается окружности в точке B , а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что D лежит на отрезке AC . Найти $\angle BAC$ и радиус окружности, если $BC = 4$, $BD = 3$, $\angle BAC = \arccos \frac{1}{3}$.

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD , точка S лежит на прямой AB , $S \neq A$, $AB = BS$. В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $4\sqrt{3}$, $\angle DAB = \arctg \sqrt{\frac{37}{3}}$. Точки A_1 , B_1 , C_1 — середины ребер AD , BD , CD соответственно.

Найти 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1 ,

2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1 ,

3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1 , BA_1 и CB_1 .

БИЛЕТ 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+y+1} + 7 \cdot 2^{y-5} = 4, \\ \sqrt{2x+y^2} = x+y \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos^3 x \sin 3x}{\cos 2x} + \frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos 2x} = 3 \sin 2x \cos x$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 - 3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x + 4}}$$

4. Через точку A проведены две прямые одна из них касается окружности в точке B , а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что точка C лежит на отрезке AD . Найдите $\angle ACB$ и радиус окружности, если $BD = 5$, $\angle BAC = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\angle BDC = \arccos \sqrt{\frac{5}{21}}$

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD , точка S лежит на прямой AB , $2AB = BS$ и точка B лежит между A и S . В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F , чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Сторона основания ABC правильной пирамиды $ABCD$ равна $8\sqrt{3}$, высота пирамиды $DO = 6$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найдите 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1 ,
2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1 ,
3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1 .

БИЛЕТ 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5^{x+y+1} + 16 \cdot 5^{y-2} = 10, \\ \sqrt{x+y^2} = x+y \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos x} + \cos^2 x \sin 3x = 6 \cos 2x \sin^2 x$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{4 - \sqrt{x^2 - 2x - 8}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 12}}$$

4. Через точку A проведены две прямые одна из них касается окружности в точке B , а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что D лежит на отрезке AC . Найти AD , CD и радиус окружности, если $AB = 3\sqrt{11}$, $BC = 8$ и $\angle ABD = \arcsin \frac{3}{4}$.

5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F — середина ребра CD , точка S лежит на прямой AB , $AB = 2BS$, точка B лежит между A и S . В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F , чтобы пройденный им путь был минимальным?

6. Боковое ребро правильной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC равно $8\sqrt{10}$, $\angle ADB = \arcsin \frac{\sqrt{111}}{20}$. Точки A_1 , B_1 , C_1 — середины ребер AD , BD , CD соответственно. Найти 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1 ,
2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1 ,
3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1 , BA_1 и CB_1 .

БИЛЕТ 4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x+y+1} + 16 \cdot 3^{y-3} = 10, \\ \sqrt{2x + y^2} = x + y \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^3 x \cos 3x}{\cos x} + \cos^2 x \sin 3x + 6 \cos 2x \sin^2 x = 0$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{2 - \sqrt{x^2 + 3x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 7}}$$

4. Через точку A проведены две прямые одна из них касается окружности в точке B , а другая пересекает эту окружность в точках C и D так, что C лежит на отрезке AD . Найти AB , BC и радиус окружности, если $CD = 1$, $\angle BAC = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\angle BCD = \arccos \sqrt{\frac{2}{11}}$.
5. Тело в форме тетраэдра $ABCD$ с одинаковыми ребрами поставлено гранью ABC на плоскость. Точка F лежит на ребре CD и $2DF = FC$, точка S лежит на прямой AB , $AB = 3BS$ и точка B лежит между A и S . В точку S сажают муравья. Как должен муравей ползти в точку F , чтобы пройденный им путь был минимальным?
6. Боковое ребро правильной пирамиды $ABCD$ с основанием ABC равно 20, $\angle DAB = \arcsin \frac{\sqrt{13}}{5}$. Точки A_1, B_1, C_1 — середины ребер AD, BD, CD соответственно. Найти: 1) угол между прямыми BA_1 и AC_1 , 2) расстояние между прямыми BA_1 и AC_1 , 3) радиус сферы, касающейся плоскости ABC и отрезков AC_1, BA_1 и CB_1 .

БИЛЕТ 5

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 + 4x - 23} - \sqrt{x^2 + 2x - 8} = 1$$

2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 4|\sin x|$$

3. Решить неравенство

$$\log_{(2x+9)} (24 + 2x - x^2) + \log_{\sqrt{24+2x-x^2}} (2x+9) \leq 3$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 4$ и $AC = 2$, проведены биссектриса AA_1 , медиана BB_1 и высота CC_1 . Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых 1) AC, AA_1 и CC_1 , 2) AA_1, BB_1 и CC_1 .

5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 9y^2 - 18y \leq 0, \\ 2x + 3 - 2xy \leq 0 \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга и шара радиуса R внешним образом. При каком соотношении между r и R это возможно? Считая, что $R > r$, найти радиус шара, касающегося всех четырех шаров внешним образом.

БИЛЕТ 6

1. Решить уравнение $\sqrt{2x^2 - 8x + 25} - \sqrt{x^2 - 4x + 13} = 2$

2. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$

3. Решить неравенство

$$\log_{(20-2x)}(99 - 2x - x^2) + \log_{\sqrt{99-2x-x^2}}(20 - 2x) \leq 3$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 6$ и $AC = 2$, проведены медиана AA_1 , высота BB_1 и биссектриса CC_1 . Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых 1) BB_1 , CC_1 и BC , 2) AA_1 , BB_1 и CC_1 .

5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} y^2 + 3xy + 1 \leq 0, \\ 9x^2 - 12x - 8y \leq 0 \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R . При каком соотношении между r и R это возможно? Найти радиус наименьшего из шаров, касающихся трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом.

БИЛЕТ 7

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 12x + 46} - \sqrt{x^2 - 6x + 22} = 3$$

2. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 3x = 4|\cos x|$$

3. Решить неравенство

$$\log_{(x+3)}(6 + x - x^2) + \log_{\sqrt{6+x-x^2}}(x + 3) \leq 3$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 4$ и $AC = 2$, проведены медиана AA_1 , биссектриса BB_1 и высота CC_1 . Найти площадь треугольника образованного пересечением прямых
1) AB , AA_1 и BB_1 , 2) AA_1 , BB_1 и CC_1

5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 + 8x \leq 0, \\ xy + y + 1 \leq 0 \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга и шара радиуса R внешним образом. При каком соотношении между r и R это возможно? Считая, что $R > r$, найти радиус сферы, такой, что все четыре шара касаются ее внутренним образом

БИЛЕТ 8

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2 - 8x + 49} - \sqrt{x^2 - 4x + 21} = 4$$

2. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\left(\frac{13}{2}-x\right)}\left(\frac{99}{4}-x-x^2\right)+\log_{\sqrt{\frac{99}{4}-x-x^2}}\left(\frac{13}{2}-x\right) \leq 3$$

4. В треугольнике ABC таком, что $AB = BC = 6$ и $AC = 2$, проведены биссектриса AA_1 , высота BB_1 и высота CC_1 . Найти площадь треугольника, образованного пересечением прямых
1) AB , AA_1 и BB_1 , 2) AA_1 , BB_1 и CC_1

5. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + 3 \leq 0, \\ y^2 + 6y + 18x \leq 0 \end{cases}$$

6. Три шара радиуса r касаются друг друга внешним образом и каждый шар касается внутренним образом сферы радиуса R . При каком соотношении между r и R это возможно? Найти радиус наибольшего из шаров, касающихся трех шаров радиуса r внешним образом, а сферы радиуса R внутренним образом

БИЛЕТ 9

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + 5x + 6} < 1 + \sqrt{x^2 + x + 1}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x + \cos x}{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x} = \frac{\sqrt{2}|1 - 2\sin^2 x|}{\sin x \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{6}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{6}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = \sqrt{70}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2 , а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2 . Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2 , $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2 . Через точку B_2 проведена прямая l_3 , перпендикулярная прямой l_2 . Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A , а прямую l_3 — в точке B . Найти A_1A_2 , B_1B_2 и стороны треугольника ABB_2 .

4. Апсфема правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковое ребро образует с основанием $ABCD$ угол равный $\arctg \sqrt{\frac{3}{2}}$. Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} = \frac{SK}{KC} = \frac{1}{2}$. Найти 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK , 2) расстояние от точки D до плоскости EFK , 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK .

5. Найти все
- a
- , при которых уравнение

$$\log_5(x + \sqrt{2-a}) + \log_{1/5}(a-1-x) = \log_{25} 9$$

имеет решение

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x - 6y + 4z + xy = 0, \\ 3x - 5y + z - y^2 = 0 \\ x - 4y - 2z - yz = 0 \end{cases}$$

БИЛЕТ 10

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 + 4x + 3} < 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x + \sin 3x - \sin 2x - \sin x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x} = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2} \sin x \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{3}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = 2\sqrt{13}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2 , а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2 . Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2 , $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_1 и B_1 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2 . Через точку B_1 проведена прямая l_3 , перпендикулярная прямой l_2 . Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A , а прямую l_3 — в точке B . Найти A_1A_2 , B_1B_2 и стороны треугольника ABB_1 .

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 1, боковое ребро образует с основанием угол, равный $\arctg 4$. Точки E, F, K выбраны соответственно на ребрах AB, AD и SC так, что $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{SK}{SC} = \frac{2}{3}$. Найти 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK , 2) расстояние от точки D до плоскости EFK , 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK .

5. Найти все
- a
- , при которых уравнение

$$\log_3(x + \sqrt{5 - a}) + \log_{1/3}(a - 2 - x) = \log_9 4$$

имеет решение

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - y - 5z - 2yz = 0, \\ x - 5y - z - 2z^2 = 0, \\ x + 9y - 3z + 2xz = 0 \end{cases}$$

БИЛЕТ 11

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 5x + 6} < 1 + \sqrt{x^2 - x + 1}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos 4x - \cos 3x + \cos 2x - \cos x}{\sin 4x - \sin 3x - \sin 2x + \sin x} = \frac{\sqrt{2}|2\cos^2 x - 1|}{\sin x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{6}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{6}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = \sqrt{70}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2 , а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2 . Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2 , $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_2 и B_2 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2 . Через точку B_1 проведена прямая l_3 , перпендикулярная прямой l_2 . Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A , а прямую l_3 — в точке B . Найти A_1A_2 , B_1B_2 и стороны треугольника ABB_1 .
4. Высота правильной пирамиды $SABCD$ с основанием $ABCD$ равна 3, угол между соседними боковыми ребрами равен $\arccos \frac{9}{10}$. Точки E , F , K выбраны соответственно на ребрах AB , AD и SC так, что $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD} = \frac{CK}{SC} = \frac{1}{3}$. Найти 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK , 2) расстояние от точки D до плоскости EFK , 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK .
5. Найти все a , при которых уравнение

$$\log_2(x + \sqrt{3 - a}) + \log_{1/2}(a + 1 - x) = \log_4 9$$

имеет решение

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y + 2z - x^2 = 0, \\ 10x - 3y - 3z + xz = 0, \\ 16x - y + z - xy = 0 \end{cases}$$

БИЛЕТ 12

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} < 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 4x - \sin 3x - \sin 2x + \sin x}{\cos 4x - \cos 3x + \cos 2x - \cos x} = \frac{|\cos 2x|}{\sqrt{2} \sin x \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

3. Окружность C_1 радиуса $2\sqrt{3}$ с центром O_1 и окружность C_2 радиуса $\sqrt{3}$ с центром O_2 расположены так, что $O_1O_2 = 2\sqrt{13}$. Прямая l_1 касается окружностей в точках A_1 и A_2 , а прямая l_2 — в точках B_1 и B_2 . Окружности C_1 и C_2 лежат по одну сторону от прямой l_1 и по разные стороны от прямой l_2 , $A_1 \in C_1$, $B_1 \in C_1$, $A_2 \in C_2$, $B_2 \in C_2$, точки A_2 и B_2 лежат по разные стороны относительно прямой O_1O_2 . Через точку B_2 проведена прямая l_3 , перпендикулярная прямой l_2 . Прямая l_1 пересекает прямую l_2 в точке A , а прямую l_3 — в точке B . Найти A_1A_2 , B_1B_2 и стороны треугольника ABB_2 .

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ равна 2, боковая грань образует с основанием угол, равный $\arctg 2$. Точки E , F , K выбраны соответственно на ребрах AB , AD и SC так, что $\frac{AE}{EB} = \frac{AF}{FD} = \frac{CK}{KS} = 2$. Найти 1) площадь сечения пирамиды плоскостью EFK , 2) расстояние от точки D до плоскости EFK , 3) угол между прямой SD и плоскостью EFK .

5. Найти все
- a
- , при которых уравнение

$$\log_4(x + \sqrt{4 - a}) + \log_{1/4}(a + 2 - x) = \log_{16} 9$$

имеет решение

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 6x - 5y + 9z - 2y^2 = 0, \\ x - 2y + 4z - 2xy = 0, \\ 4x - y + z - 2yz = 0 \end{cases}$$

Ф И З И К А

БИЛЕТ 1

$$1. 1) a_1 = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) \approx 2,9 \text{ м/с}^2 \quad 2) L = \frac{3}{4} (\mu_2 - \mu_1) g t^2 \cos \alpha = 25 \text{ см}$$

$$2. Q_{13} = \frac{\lambda}{2} + 4R\Delta T$$

$$3. A = \left(\frac{Q}{2} + \frac{3e\varepsilon}{d} \right) \varepsilon$$

$$4. J_m = U_1 \sqrt{\frac{C_1 C_2}{L(C_1 + C_2)}}$$

$$5. x = \frac{Rn^2}{2+n-n^2} = 18 \text{ см}$$

БИЛЕТ 2

$$1. a_1 = 9/10 \approx 0,98 \text{ м/с}^2, \quad t\sqrt{3} = 1,7 \text{ с}$$

Р е ш е н и е На брусок со стороны доски действует сила трения скольжения $F_1 = 2\mu mg$, направленная вправо. Применяя второй закон Ньютона к грузу и к бруску, найдем их ускорение

$$a_1 = (l - 2m)g/3 = g/10 = 0,98 \text{ м/с}^2$$

Заметим, что движение доски не влияет на ускорение a_1 . Это связано с тем, что при движущейся и закрепленной доске сила трения F_1 между доской и бруском одна и та же. Рассмотрим движение доски. На нее действуют две горизонтальные силы: направленная влево сила трения F_1 со стороны бруска и направленная вправо сила трения $F_2 = 5\mu_2 mg$ со стороны стола. Ускорение доски

$$a_2 = (F_1 - F_2)/3m = (2\mu_1 - 5\mu_2)g/3 = g/15 < a_1$$

Ускорение бруска относительно доски

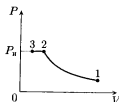
$$a = a_1 - a_2 = (l - 4\mu_1 + 5\mu_2)g/3 = g/30$$

С этим ускорением брусок пройдет относительно доски путь S за время

$$t = (2S/a)^{1/2} = (6S/(l - 4\mu_1 + 5\mu_2)g)^{1/2} = \sqrt{3} \text{ с} = 1,7 \text{ с}$$

$$2. \Lambda = 2(Q - RT \ln 2)$$

Решение При изотермическом сжатии ненасыщенного пара его давление растет, пока не станет равным давлению насыщенного пара P_n . При дальнейшем сжатии давление и температура пара не меняются. Изменение объема происходит



к задаче 2

за счет конденсации массы пара Δm (см рис). В процессе изменения давления на участке 1-2 над паром была совершена работа величиной $\nu RT \ln(V_1/V_2)$. В процессе конденсации 2-3 от пара необходимо отвести теплоту конденсации $\Lambda\nu/2$. По условию $Q = \nu RT \ln(V_1/V_2) + \Lambda\nu/2$, где Λ — молярная теплота конденсации. Чтобы найти отношение объемов V_1/V_2 , заметим, что при конденсации в процессе 2-3 давление и температура постоянны. Объем изменится в два раза так, что половина пара сконденсировалась $V_2/V_3 = 2 = k/2$. По условию $V_1/V_3 = k$, следовательно, $V_1/V_2 = k/2$. Итак,

$$Q = \nu RT \ln(k/2) + \Lambda\nu/2,$$

$$\Lambda = 2/3(Q - \nu RT \ln(k/2)) = 2(Q - RT \ln 2)$$

$$3. v = \frac{q_1 + q_2}{2} \sqrt{\frac{d}{\epsilon_0 MS}}$$

Решение После отскока верхней пластины от нижней заряд на каждой пластине будет равен $q = (q_1 - q_2)/2$. Работа электрического поля до столкновения пластин $A_1 = = q_1 q_2 d / 2\epsilon_0 S$. Работа поля за время подъема верхней пластины до прежнего уровня $A_2 = (q_1 - q_2)^2 d / 8\epsilon_0 S$. По закону сохранения энергии суммарная работа поля равна кинетической энергии верхней пластины после отскока на прежнее расстояние

$$A_1 + A_2 = Mv^2/2$$

После подстановки выражений для A_1 и A_2 получим, что

$$v = (q_1 + q_2) \sqrt{d/\epsilon_0 MS}/2$$

$$4. U_{\max} = I_0 \sqrt{\frac{L_1 L_2}{C(L_1 + L_2)}}$$

Решение Сразу после замыкания ключа K напряжение на конденсаторе остается равным нулю. Сохраняются и токи в катушках: через катушку L_1 течет ток I_0 , а в катушке L_2 ток равен нулю. Затем начинает нарастать ток через катушку L_2 . Пусть в некоторый момент ток через катушку L_1 равен I_1 , а через катушку L_2 ток равен I_2 . Пусть токи в катушках текут по часовой стрелке. Запишем закон Ома для контура, охватывающего обе катушки

$$L_1 dI_1/dt + L_2 dI_2/dt = 0$$

Отсюда следует, что $L_1 I_1 + L_2 I_2 = \text{const}$. Очевидно, что константа равна $L_1 I_0$, поэтому

$$L_1 I_1 + L_2 I_2 = L_1 I_0$$

В тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально и равно U_{max} , ток через конденсатор равен нулю, а через катушки будет течь ток, который обозначим через I_m . Тогда

$$(L_1 + L_2) I_m = L_1 I_0$$

Отсюда

$$I_m = L_1 I_0 / (L_1 + L_2)$$

В момент замыкания ключа энергия контура сосредоточена в катушке L_1 и равна

$$W_1 = L_1 I_0^2 / 2$$

А в тот момент, когда напряжение на конденсаторе максимально, энергия, запасенная в контуре, равна

$$W_2 = (L_1 + L_2) I_m^2 / 2 + C u_{\text{max}}^2 / 2$$

По закону сохранения энергии

$$W_1 = W_2$$

$$L_1 I_0^2 / 2 = (L_1 + L_2) I_m^2 / 2 + C u_{\text{max}}^2 / 2$$

Отсюда

$$U_{\text{max}} = I_0 \sqrt{L_1 L_2 / C (L_1 + L_2)}$$

$$5. L = \frac{(6n-1)R}{(3n-1)n} = 15 \text{ см}$$

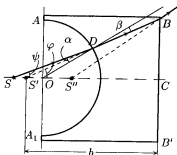
Решение Определим положение изображения источника S' , даваемое преломляющей поверхностью AA_1 . Ввиду

малости преломляющих углов имеем

$$\alpha/\beta = n$$

(см. рис.) Из теоремы синусов для треугольника $OS'D$

$$(b - 2R)/\beta = R/\varphi$$



к задаче 5

Аналогично для треугольника OSD

$$R/2\alpha = R/\psi,$$

откуда $\psi = 2\alpha$ или

$$\varphi = \psi - \alpha = 3\beta n - \beta$$

Решая второе уравнение относительно b , получаем

$$b = (6n - 1)R/(3n - 1)$$

Определим положение изображения источника S'' при преломлении на границе BB' . Очевидно, что $S''C = b/n$. Окончательно

$$S''C = (6n - 1)R/(3n - 1)n = 15 \text{ см}$$

БИЛЕТ 3

1. 1) $a_1 = g(\sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) = 7 \text{ м/с}^2$

2) $t = \sqrt{\frac{3S}{2(\mu_2 - \mu_1)g \cos \alpha}} \approx 1,2 \text{ с}$

2. $\Lambda = 3Q - 6R\Delta T$

$$3. A = \frac{\varepsilon_0 S \mathcal{E}^2}{d}$$

$$4. I = v_0 \sqrt{\frac{C_1}{L} \frac{(C_2 - C_1)}{C_2}}$$

$$5. y = \frac{2R}{n(2-n)} = 26,7 \text{ см}$$

БИЛЕТ 4

$$1. 1) a_1 = \mu_1 g = 0,98 \text{ м/с}^2 \quad 2) L = \frac{3}{4} (1 - 3\mu_1 - 2\mu_2) g t^2 \approx 72 \text{ с}$$

$$2. Q = \Lambda \nu_{\text{ж}} + 2RT \ln \frac{3}{2}$$

$$3. v = v_0 \sqrt{1 + \frac{(q_1 - q_2)^2 d}{4\varepsilon_0 S M v_0^2}}$$

$$4. v = I_0 \sqrt{\frac{L_1}{C} \frac{(L_2 - L_1)}{L_2}}$$

$$5. z = \frac{R(n^2 - 2)}{n^2 + n - 1} = 0,9 \text{ см}$$

БИЛЕТ 5

$$1. 1) v = \sqrt{v_0^2 - \frac{4}{7} g R} \quad 2) F = \frac{2\sqrt{6}}{7} m \left(\frac{v_0^2}{R} + \frac{g}{7} \right)$$

$$2. 1) P_1 = P_{\min} = \frac{P_{\max}}{k^2} = 4 \cdot 10^5 \text{ Па} \quad 2) V_1 = \frac{2}{3} \frac{k^2}{k-1} \frac{\Delta U}{P_{\max}} = 1 \text{ л}$$

$$(\Delta U = \nu \frac{3}{2} R T_1 (k - 1))$$

$$3. 1) J = \frac{\mathcal{E}}{R_1} \quad 2) Q = \frac{C_1 \mathcal{E}^2}{2}$$

$$4. H = v_0 \sqrt{\frac{M + (Bl)^2 C}{2k}}$$

$$5. L = \frac{hF}{a} = 1 \text{ см}$$

БИЛЕТ 6

$$1. 1) v = u^2 - gR \quad 2) F = Mg + \frac{3}{4m} \left(\frac{7}{4} g - \frac{u^2}{R} \right)$$

Решение По закону сохранения энергии

$$mu^2/2 = mv^2/2 + mgh$$

Отсюда с учетом того, что $H = R/2$ находим скорость шайбы в точке D

$$v = \sqrt{u^2 - gR}$$

Для ответа на второй вопрос найдем сначала силу давления шайбы на горку в точке D . Запишем уравнение движения шайбы в проекции на направление DO

$$mg \cos \gamma - N = mv^2/R$$

Отсюда с учетом полученного выражения для v

$$N = m(7/4g - u^2/R)$$

По третьему закону Ньютона шайба давит на горку с такой же силой N в направлении DO . На горку еще действует направленная вертикально вниз сила тяжести Mg , горизонтально направленная сила давления со стороны стенки и вертикально направленная сила F со стороны стола. Горка в покое и поэтому

$$F = Mg + N \cos \gamma$$

С учетом полученного ранее выражения для N имеем

$$F = Mg + 3/4m(7/4g - u^2/R)$$

По третьему закону Ньютона горка давит на стол с такой же силой F , но направленной вертикально вниз.

2. 1) $V_1 = 1 \text{ л}$ 2) $\Delta U = \frac{P_1 V_1 C_v (1 - k)}{kR} = -75 \text{ Дж}$

Решение Из уравнения процесса $PV = \text{const}$ и уравнения состояния $PV = RT$ находим, что в указанном процессе имеет место $TV = \text{const}$. По условию температура уменьшается (газ охлаждается), значит объем V газа растет. Следовательно, минимальный объем у газа был в начальном состоянии, где $V_1 = V_{\min} = 1 \text{ л}$. Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U = U_1 - U_2 = \nu C_v (T_2 - T_1),$$

где по условию $T_2 = T_1/k$. Начальную температуру газа T_1 можно найти из уравнения состояния

$$P_1 V_1 = \nu RT_1$$

Таким образом,

$$\Delta U = \nu C_v T_1 (1/k - 1) = P_1 V_1 C_v (1 - k)/kR = -75 \text{ Дж}$$

3. 1) $\mathcal{E} = I_0(R_1 + R_2)$ 2) $Q = \frac{C_2 I_0^2 (R_1 + R_2)^2}{2}$

Р е ш е н и е В момент замыкания ключа K разность потенциалов на конденсаторах C_1 и C_2 равна нулю, а диод D_2 заперт. Следовательно, батарея замкнута на два последовательно соединенных резистора сопротивлением $R_1 + R_2$. Таким образом, согласно закону Ома ЭДС батареи равна

$$\mathcal{E} = I_0(R_1 + R_2)$$

В установившемся режиме разности потенциалов на резисторах равны нулю, диод D_1 открыт, а диод D_2 закрыт. Разность потенциалов на конденсаторе C_1 равна нулю. Поэтому напряжение на конденсаторе C_2 $U_{C_2} = \mathcal{E}$. Заряд конденсатора C_2 равен

$$q = C_2 \mathcal{E} = C_2 I_0 (R_1 + R_2)$$

Работа, совершенная батареей в процессе зарядки конденсаторов, равна

$$A = q\mathcal{E} = C_2 I_0^2 (R_1 + R_2)^2$$

Энергия, полученная электрической системой, равна

$$W = q^2/2C_2 = C_2 I_0^2 (R_1 + R_2)^2/2$$

Из закона сохранения энергии

$$A = W + Q,$$

где Q — выделившееся тепло. Очевидно, что

$$Q = C_2 I_0^2 (R_1 + R_2)^2/2$$

4. $v = \frac{a^2 B_0^2}{31 \rho M}$

Р е ш е н и е Рассмотрим произвольный момент времени в процессе установления магнитного поля. В этот момент в рамке и стержне текут токи, которые изображены на рис. Из условия непрерывности тока следует, что

$$I_2 = I + I_1$$

Закон Ома для контура $ACDFA$ имеет вид

$$a^2/4\Delta B/At = 3/2\rho a I_1 - \rho a I$$

Аналогичный закон для контура $FDNMF$ позволяет записать

$$3/4a^2\Delta B/\Delta t = 5/2\rho aI_2 + \rho aI$$

Из совместного решения предыдущих трех уравнений получим, что

$$I = 2a/31\rho\Delta B/\Delta t$$

Сила Ампера, действующая на стержень DF , к задаче 4

$$F_a = IaB = 1a^2/31\rho B\Delta B/\Delta t$$

Импульс силы, подействовавший на стержень за время установления индукции магнитного поля, очевидно, равен импульсу стержня, который он приобрел за это время

$$F_a dt = a^2/31\rho d(B^2) = a^2 B_0^2/31\rho = Mv$$

Отсюда

$$v = a^2 B_0^2/31\rho M$$

$$5. L = \frac{hF}{d} = 1,25 \text{ см}$$

Решение До смещения источника S' по формуле линзы найдем расстояние b от изображения источника до линзы

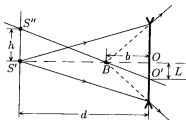
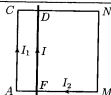
$$1/d + 1/b = -1/F$$

Отсюда

$$b = dF/(d + F) = 8 \text{ см}$$

Источник, его изображение и оптический центр линзы всегда лежат на одной прямой. Поэтому проведем прямую через смещенный источник S'' и его изображение (точка B). На рис. это прямая $S''B$. Точка O' является новым оптическим центром линзы. Следовательно, линзу надо сместить вниз на расстояние OO' , которое обозначим через L . Расстояние L найдем из подобия треугольников $S'S''B$ и BOO'

$$L/h = b/(d - b)$$



к задаче 5

Отсюда

$$L = bh/(d - b) = hF/d = 1,25 \text{ см}$$

БИЛЕТ 7

$$1. 1) v = \sqrt{\frac{gR}{5}} \quad 2) F_{\text{тр}} = mg \left(2 \frac{H}{R} - 2 + 3 \cos \alpha \right) \sin \alpha = \frac{24}{25} mg$$

$$2. 1) P_{\text{max}} = k^2 P_{\text{min}} = 9 \cdot 10^5 \text{ Па} \quad 2) V_2 = \frac{2}{3} \frac{\Delta V}{k-1} \frac{1}{P_{\text{min}}} = 0,17 \text{ л}$$

$$3. 1) J = \frac{\varepsilon}{R_1} \quad 2) Q = \frac{1}{2} \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon^2$$

$$4. v = h \sqrt{\frac{2k}{M + (Bl)^2 C}}$$

$$5. L = \frac{hF}{a} = 6 \text{ см}$$

БИЛЕТ 8

$$1. 1) v = \sqrt{\frac{gR}{3}} \quad 2) F_{\text{тр}} = mg \frac{\sqrt{5}}{g} \quad ?$$

$$2. 1) V_1 = \frac{V_{\text{max}}}{k^2} = \frac{1}{3} \text{ л} \quad 2) P_1 = \frac{2}{3} \frac{k^2}{k-1} \frac{\Delta V}{V_{\text{max}}} = 10^5 \text{ Па}$$

$$3. 1) \varepsilon = J_0 R_1 \quad 2) Q = \frac{(C_1 + C_2) J_0^2 R_1^2}{2}$$

$$4. v = \frac{a^2 \sqrt{3} B_0^2}{112 \rho M}$$

$$5. h = \frac{La}{F} = 8 \text{ см}$$

БИЛЕТ 9

$$1. 1) v_1 = u\sqrt{3} \approx 12 \text{ м/с} \quad 2) v_2 = 3u \approx 21 \text{ м/с}$$

$$2. 1) Q_r = \frac{5}{2} A \quad 2) \lambda = \frac{Q}{A\mu} RT_0$$

$$3. Q = \frac{C\varepsilon}{3}$$

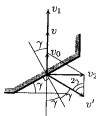
$$4. F = 2a \frac{\Gamma}{\Gamma_1 - \frac{3}{2}\Gamma} = 36 \text{ см}$$

$$5. F = 2\pi \frac{R^4}{CL^2} I \approx 7,5 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$$

БИЛЕТ 10

1. 1) $v_0 = \frac{v_2}{\sqrt{3}} = 1 \text{ м/с}$ 2) $v_1 = v_2\sqrt{3} = 3 \text{ м/с}$

Решение Перейдем в систему отсчета, связанную с плитой. В этой системе отсчета скорость мяча $v = v_1 - v_0$ и направлена вертикально вверх (см. рис.), составляя угол γ с нормалью к поверхности плиты (угол падения). Относительно плиты мяч отскочит со скоростью $v' = v$ под углом отражения, равным углу падения γ . Векторное сложение относительной скорости v' и скорости плиты v_0 даст скорость v_2 мяча относительно Земли (см. рис.). Имеем



к задаче 1

$$v_0 = v_2 / \operatorname{tg} 2\gamma = v_2 / \sqrt{3} = 1 \text{ м/с},$$

$$v = v_2 / \sin 2\gamma,$$

$$v_1 = v + v_0 = v_2 / \operatorname{tg} \gamma = v_2 \sqrt{3} = 3 \text{ м/с}$$

2. 1) $\Delta T = \frac{2Q}{5\nu R}$ 2) $Q_1 = \frac{2\mu_n \lambda Q}{5RT_0}$

Решение Давление насыщенного пара зависит только от температуры, которая по условию в нижней части поддерживается постоянной. Следовательно, давление пара и давление гелия остается в процессе постоянным (гелий отделен от пара подвижной перегородкой). При увеличении температуры гелия в процессе с постоянным давлением подведенное тепло Q идет на увеличение внутренней энергии и совершение работы гелием против силы давления пара

$$Q = \nu C_v (T_2 - T_1) + P(V_2 - V_1) = \nu (C_V + R)(T_2 - T_1)$$

Итак, для гелия

$$\Delta T = Q / \nu (C_v + R) = 2Q / 5\nu R$$

При конденсации пара массой Δm_n при постоянном давлении выделяется тепло в количестве $\lambda \Delta m$, которое и нужно отвести. Чтобы найти массу Δm сконденсировавшегося пара, надо приравнять величину работы, совершенной гелием

$$A_r = \nu R (T_2 - T_1) = Q R / (C_V + R)$$

к все причине работы пара A_n при постоянном давлении и температуре

$$A_n = P(V_2 - V_1) = (m_2 - m_1)RT_0/\mu_n = \Delta m RT_0/\mu_n$$

Таким образом,

$$QR/(C_V + R) = \Delta m RT_0/\mu_n,$$

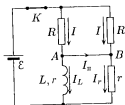
$$\Delta m = Q\mu_n/(C_V + R)T_0$$

Окончательно тепло, которое необходимо отвести от пара

$$Q_1 = \lambda \Delta m = \lambda \mu_n Q/(C_V + R)T_0 = 2\mu_n \lambda Q/5RT_0$$

$$3. Q = \frac{\varepsilon L}{2r(R+r)}$$

Решение На рисунке изображены токи в участках цепи в произвольный момент после замыкания ключа K . Токи через



к задаче 3

резисторы R всегда равны. Из непрерывности тока ток через катушку

$$I_L = I - I_n,$$

а ток через резистор r

$$I_r = I + I_n$$

Закон Ома для контура, содержащего катушку и резистор r , имеет вид

$$L\Delta I_L/\Delta t = (I + I_n)r - I_L r$$

После подстановки первых двух уравнений в третье получим

$$L\Delta I_L/\Delta t = (I + I_n)r - (I - I_n)r = 2rI_n$$

Из последнего уравнения следует, что

$$L\Delta I_L = 2rI_n\Delta t$$

Учитывая, что начальный ток через катушку равен нулю, а конечный равен установившемуся току $I_{y.c.}$, находим заряд, протекший через перемычку AB

$$LI_{y.c.} = 2rQ,$$

или

$$Q = LI_{y.c.}/2r$$

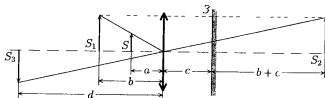
Поскольку установившийся ток через катушку

$$I_{y.c.} = \varepsilon/(R + r),$$

то заряд равен

$$Q = \varepsilon L / 2r(R + r)$$

4. $c = \frac{F}{3} = 5 \text{ см}$



к задаче 4

Решение Из формулы линзы (см. рис.)

$$1/a - 1/b = 1/F$$

при условии что $b/a = \Gamma_1$ следует, что $b = F$. Общее увеличение, даваемое системой «линза-зеркало» равно $\Gamma_2 = \Gamma_1 \Gamma'_1$, где

$$\Gamma'_1 = \frac{d}{b + 2c}$$

Используя формулу линзы для предметов S_2 и S_3 (S_2 — изображение предмета S_1 в зеркале), получаем

$$d = \left(1 + \frac{d}{b + 2c}\right) F = (1 + \Gamma'_1) F$$

Расстояние от линзы до изображения предмета S_3 даваемого системой

$$d = F(\Gamma'_1 + 1) = (b + 2c)\Gamma'_1,$$

или

$$F(\Gamma_2/\Gamma_1 + 1) = (b + 2c)\Gamma_2/\Gamma_1$$

Отсюда для искомого расстояния c находим

$$c = F/3 = 5 \text{ см}$$

5. $F = \frac{1,1NS}{4\pi R^2 c}$

Решение Мощность излучения, падающего на зеркало,

$$N_3 = NS/(4\pi R^2)$$

Импульс фотона P_Φ и его энергия E_Φ связаны соотношением

$P_{\Phi} = E_{\Phi}/c$ Здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света. Поэтому импульс P падающего на зеркало света в единицу времени и мощность N_3 (энергия в единицу времени) связаны аналогично

$$P = N_3/c$$

В единицу времени импульс отраженного света $P_{\text{отр}} = 0,3P$, импульс прошедшего света $P_{\text{пр}} = 0,2P$, импульс зеркала $P_3 = P + P_{\text{отр}} - P_{\text{пр}} = 1,1P$, поскольку по закону сохранения

импульса

$$P_{\text{отр}} + P_{\text{пр}} + P_3 = P$$

к задаче 5

(см. рис.)

Сила на зеркало $F = P$

С учетом полученных выражений для P_3 , P и N_3 находим силу F

$$F = 1,1NS/4\pi R^2 c$$

БИЛЕТ 11

$$1. 1) v_1 = u\sqrt{3} \approx 14 \text{ м/с} \quad 2) v_2 = u \left(\frac{1}{\cos 2\beta} - 1 \right) = u \approx 8 \text{ м/с}$$

$$2. 1) \lambda = \frac{RT_0}{\mu} \frac{Q}{A} \quad 2) Q_1 = A \frac{C_v + R}{R} = \frac{5}{2} A$$

$$3. Q = \frac{C\mathcal{E}}{2}$$

$$4. a = 2 \text{ см}$$

$$5. F = \frac{N}{C} \sqrt{2(1 - \cos \alpha)} = 0,67 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$$

БИЛЕТ 12

$$1. 1) v_0 = \frac{v_2}{\sqrt{3}} = 2 \text{ м/с} \quad 2) v_1 = v_2 \tan \varphi = \frac{v_2}{\sqrt{3}} \approx 2 \text{ м/с}$$

$$2. 1) Q = \lambda \Delta m \quad 2) Q_c = \frac{5}{2} RT_0 \frac{\Delta m}{\mu_n}$$

$$3. Q = \frac{L\mathcal{E}}{3r(R+r)}$$

$$4. F = \frac{40}{7} \approx 5,7 \text{ см}$$

$$5. F = \frac{0,7NS}{4\pi R^2 C} \approx 0,74 \cdot 10^{-12} \text{ Н}$$

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1

$$1. \left(0, \log_3 \frac{36}{17}\right), \left(\log_3 \frac{49}{27}, \log_3 \frac{9}{7}\right)$$

Решение Возводя в квадрат обе части второго уравнения системы, получаем $x + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$ или

$$x(x + 2y - 1) = 0, \quad (1)$$

откуда следует, что либо $x = 0$, либо $x = 1 - 2y$

Уравнение (1) равносильно второму уравнению исходной системы, если

$$x + y \geq 0 \quad (2)$$

а) Пусть $x = 0$, тогда из первого уравнения получаем

$$3^y = \frac{36}{17}, \text{ откуда } y = \log_3 \frac{36}{17}$$

Пара чисел $\left(0, \log_3 \frac{36}{17}\right)$ удовлетворяет условию (2) и является решением исходной системы

б) Пусть $x = 1 - 2y$, тогда из первого уравнения системы получаем $3^{2-y} + 73^{y-2} = 8$ или $t + \frac{7}{t} = 8$, где $t = 3^{2-y}$. Уравнение $t^2 - 8t + 7 = 0$ имеет корни $t_1 = 1$, $t_2 = 7$

Если $t = 1$, то $3^{2-y} = 1$, откуда $y = 2$, $x = -3$. Пара чисел $(-3, 2)$ не удовлетворяет условию (2)

$$\text{Если } t = 7, \text{ то } 3^{2-y} = 7, 3^y = \frac{9}{7}, y = \log_3 \frac{9}{7}, x = 1 - 2 \log_3 \frac{9}{7} = \log_3 \frac{49}{27}$$

Пара чисел $\left(\log_3 \frac{49}{27}, \log_3 \frac{9}{7}\right)$ удовлетворяет условию (2) и является решением исходной системы

$$2. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Решение Из формул для $\cos 3x$ и $\sin 3x$ следует, что

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} (\cos 3x + 3 \cos x), \quad \sin^3 x = \frac{1}{4} (3 \sin x - \sin 3x)$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x &= \frac{3}{4} (\sin 3x \cos x + \sin x \cos 3x) = \\ &= \frac{3}{4} \sin 4x = 3 \sin x \cos x \cos 2x,\end{aligned}$$

и исходное уравнение при условии

$$\sin x \neq 0$$

равносильно каждому из уравнений

$$3 \sin x \cos x \cos 2x = 6 \sin x \cos^2 x \cos 2x,$$

$$\cos x \cos 2x \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

3. $x < -2$, $x = -1$, $x > 3$

Решение Область E допустимых значений неравенства определяется условиями $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) \geq 0$ и $\sqrt{x^2 - x - 2} \neq 0$, т.е. E — объединение промежутков $x < -2$, $-2 < x \leq -1$, $2 \leq x < 3$, $x > 3$. Следовательно E — внешность интервала $(-1, 2)$ с выброшенными точками -2 и 3 (см. рис.)



к задаче 3

Рассмотрим два возможных случая $2 - \sqrt{x^2 - x - 2} < 0$ и $2 - \sqrt{x^2 - x - 2} > 0$

а) Пусть $2 - \sqrt{x^2 - x - 2} < 0$ т.е.

$$2 < \sqrt{x^2 - x - 2} \quad (3)$$

На множестве E неравенство (3) равносильно каждому из неравенств $4 < x^2 - x - 2$, $(x+2)(x-3) > 0$. Поэтому числа из промежутков $x < -2$ и $x > 3$ — решения исходного неравенства, так как левая часть исходного неравенства отрицательна при условии (3), а правая положительна при всех x .

б) Пусть

$$2 > \sqrt{x^2 - x - 2} \quad (4)$$

Множество E_1 решений неравенства (4) — это множество ре-

шений системы

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ 4 > x^2 - x - 2. \end{cases}$$

Следовательно, E_1 — объединение промежутков $(-2, 1]$ и $[2, 3)$

На множества E_1 исходное неравенство равносильно каждому из неравенств $2 - \sqrt{x^2 - x - 2} \geq \sqrt{x^2 + 3}$,

$$2 - \sqrt{x^2 + 3} \geq \sqrt{x^2 - x - 2} \quad (5)$$

На множестве E_1 левая часть (5) отрицательна при $x \neq -1$ и равна нулю при $x = -1$. Правая часть (5) положительна при $x \in E_1$, $x \neq -1$ и равна нулю при $x = -1$. Следовательно $x = -1$ — единственное решение исходного неравенства при выполнении условия (4)

$$4. AB = \frac{12}{\sqrt{17}}, CD = \frac{7}{\sqrt{17}}, R = \frac{3\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}$$

Решение Обозначим $AB = x$, $AD = y$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle ACB = \varphi$. Тогда $\angle ABD = \varphi$. Из подобия треугольников ABC и ABD (см. рис.) следует, что $\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{BC} = \frac{3}{4}$, откуда $AC = \frac{4}{3}x$. Из треугольника ABC по теореме косинусов получаем

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \alpha,$$

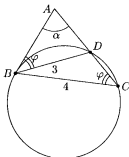
$$\text{т.е. } 16 = x^2 + \frac{16}{9}x^2 - 2x \cdot \frac{4}{3}x \cdot \frac{1}{3} = \frac{17}{9}x^2,$$

$$\text{откуда } AB = x = \frac{12}{\sqrt{17}}$$

По свойству касательной и секущей $AB^2 = AD \cdot AC$, т.е. $x^2 = y \cdot \frac{4}{3}x$, откуда $AD = \frac{9}{\sqrt{17}}$. $DC = AC - AD = \frac{16}{\sqrt{17}} - \frac{9}{\sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{17}}$

$$\text{Пусть } R \text{ — радиус окружности, тогда } R = \frac{BD}{2 \sin \varphi} = \frac{3}{2 \sin \varphi}$$

$$\text{Из треугольника } ABD \text{ по теореме синусов имеем } \frac{AD}{\sin \varphi} = \frac{BD}{\sin \alpha},$$



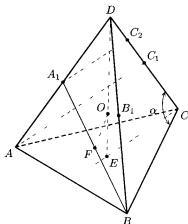
к задаче 3

Пусть $\angle C_2 A_1 B = \beta$. Тогда из $\triangle A_1 C_2 B$ по теореме косинусов находим

$$BC_2^2 = A_1 B^2 + A_1 C_2^2 - 2 A_1 B \cdot A_1 C_2 \cos \beta,$$

где $A_1 C_2 = \frac{1}{2} AC_1 = \frac{1}{2} A_1 B$

Отрезок $A_1 B$ можно найти либо по теореме косинусов из $\triangle A A_1 B$, либо с помощью равенства $4 A_1 B^2 + AD^2 = 2(AB^2 + DB^2)$, где $AB^2 = 48$, $AD^2 = BD^2 = DC^2 = 160$. Следовательно, $A_1 B^2 = 64$, $A_1 B = 8$, $A_1 C_2 = 4$ и $102 = 64 + 16 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cos \beta$, откуда $\cos \beta = -\frac{11}{32}$ и угол φ между прямыми BA_1 и AC_1 равен $\arccos \frac{11}{32}$.



к задаче 6

2) Пусть x — расстояние между прямыми BA_1 и AC_1 . Тогда $x = \frac{6V_1}{BA_1 \cdot AC_1 \sin \varphi}$, где V_1 — объем пирамиды ABA_1C_1 . Но $V_1 = \frac{1}{4} V$, где V — объем пирамиды $ABCD$.

Если E — центр основания $ABCD$, то DE — высота пирамиды $ABCD$, причем $DE = \sqrt{DC^2 - EC^2}$, где $EC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 4$.

Следовательно, $DE = \sqrt{160 - 16} = 12$, $V = \frac{1}{3} (AB)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times DE = 48\sqrt{3}$, $V_1 = 12\sqrt{3}$, $x = \frac{12 \sqrt{3}}{8 \cdot 8 \sin \varphi} \cdot 6$, где $\sin \varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{11}{32}\right)^2} = \frac{\sqrt{903}}{12}$, $x = \frac{36}{\sqrt{301}}$.

3) Пусть O — центр сферы, касающейся плоскости ABC и

отрезков AC_1 , BA_1 и CB_1 . Сфера касается основания пирамиды в точке E , а ее центр лежит на высоте DE пирамиды.

Если F — точка касания сферы с отрезком BA_1 , то $OF \perp BA_1$ и $BF = BE$ (касательные, проведенные к сфере из одной точки равны). Так как $BF = BE = EC = 4$, а $BA_1 = 8$, то F — середина BA_1 . Пусть r — радиус сферы, тогда $OE = OF = r$,

$$OA_1^2 = A_1F^2 + r^2 = 16 + r^2$$

С другой стороны, по теореме косинусов из $\triangle DOA_1$ имеем

$$OA_1^2 = DA_1^2 + DO^2 - 2DA_1 \cdot DO \cdot \cos \gamma,$$

где $\gamma = \angle ADE$, $DA_1 = 2\sqrt{10}$, $DO = DE - r = 12 - r$.

Но $\operatorname{tg} \gamma = \frac{AE}{DE} = \frac{1}{3}$, $\cos \gamma = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Следовательно,

$$16 + r^2 = 40 + (12 - r)^2 - 2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot (12 - r) \cdot \frac{3}{\sqrt{10}},$$

откуда $r = 2$.

БИЛЕТ 2

- $\left(0, \log_2 \frac{128}{71}\right), (2 \log_2 7 - 6, 4 - \log_2 7)$
- $x = \frac{\pi n}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $x < -1, x = 0, x > 4$
- $AC = 32\sqrt{\frac{3}{35}}, BC = 4\sqrt{\frac{6}{5}}, R = 3\sqrt{\frac{7}{10}}$
- Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF ,
где $P \in BC, PB = \frac{2}{5}BC$
- 1) $\arccos \frac{47}{121}$, 2) $\frac{36}{\sqrt{259}}$, 3) $\frac{8}{3}$

БИЛЕТ 3

- $\left(0, \log_5 \frac{250}{141}\right), (2 \log_5 8 - 3, 2 - \log_5 8)$
- $t = \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
- $x < -4, x = -2, x > 6$

$$4. AD = \frac{99}{5\sqrt{7}}, CD = \frac{76}{5\sqrt{7}}, R = \frac{16}{5} \sqrt{\frac{11}{7}}$$

5. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF ,
где $P \in BC$, $BP = \frac{BC}{4}$

$$6. 1) \arccos \frac{11}{32}, 2) \frac{72}{\sqrt{301}}, 3) 4$$

БИЛЕТ 4

$$1. \left(0, \log_3 \frac{270}{97}\right), (2\log_3 8 - 4, 3 - \log_3 8)$$

$$2. x = \pi n, x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3. x < -4, x = -3, x > 1$$

$$4. AB = \frac{6\sqrt{6}}{19}, BC = \frac{2\sqrt{22}}{19}, R = \frac{11\sqrt{3}}{38}$$

5. Минимальный путь состоит из отрезков SP и PF
где $P \in BC$, $BP = \frac{BC}{9}$

$$6. 1) \arccos \frac{47}{121}, 2) \frac{72}{\sqrt{259}}, 3) \frac{16}{3}$$

БИЛЕТ 5

$$1. x_1 = -6, x_2 = 4$$

Решение Пусть $t = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$, тогда $2x^2 + 4x - 23 =$
 $= 2t^2 - 7$, и уравнение можно записать в виде

$$\sqrt{2t^2 - 7} = t + 1$$

Возводя обе части полученного уравнения в квадрат, имеем

$$2t^2 - 7 = t^2 + 2t + 1, \quad \text{или} \quad t^2 - 2t - 8 = 0,$$

$$\text{откуда } t_1 = -2, t_2 = 4$$

Так как $t \geq 0$, то $\sqrt{x^2 + 2x - 8} = 4$, $x^2 + 2x - 24 = 0$, $x_1 =$
 $= -6, x_2 = 4$ Числа x_1 и x_2 являются корнями исходного
уравнения

$$2. x = \pi n, x = \frac{2\pi}{5} + \pi n, x = \frac{4\pi}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Р е ш е н и е Допустимые значения x определяются условием

$$\cos 3x \neq 0, \quad (6)$$

так как все корни уравнения $\cos x = 0$ являются корнями уравнения $\cos 3x = 0$

Функции $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} 3x$ и $|\sin x|$ — периодические функции с периодом π и поэтому достаточно найти решения исходного уравнения на промежутке $[0, \pi)$

Если $0 \leq x < \pi$ и выполняется условие (6), то исходное уравнение равносильно каждому из уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 3x}{\cos 3x} &= 4 \sin x, & \frac{\sin 4x}{\cos x \cos 3x} &= 4 \sin x, \\ \frac{4 \sin x \cos x \cos 2x}{\cos x \cos 3x} &= 4 \sin x, & \sin(\cos 2x - \cos 3x) &= 0, \\ \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{5x}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Все корни уравнения $\sin \frac{x}{2} = 0$ удовлетворяют уравнению $\sin x = 0$, а решения уравнения (7) задаются формулами

$$x = \pi k, \quad x = \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (8)$$

Из множества чисел (8) промежутку $[0, \pi)$ принадлежат числа $0, \frac{2\pi}{5}$ и $\frac{4\pi}{5}$. Поэтому множество решений исходного уравнения задается формулами $x = \pi n, x = \frac{2\pi}{5} + \pi n, x = \frac{4\pi}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$3. -4 < x < 1 - 2\sqrt{6}, -\sqrt{15} \leq x \leq -\frac{19}{5}, -3 \leq x \leq \sqrt{15},$$

$$1 + 2\sqrt{6} < x < 6$$

Р е ш е н и е Область E допустимых значений неравенства определяется условиями $2x + 9 > 0, 2x + 9 \neq 1, 24 + 2x - x^2 = (x + 4)(6 - x) > 0, 24 + 2x - x^2 \neq 1$. Отсюда следует, что E — интервал $(-4, 6)$ с выброшенными точками $x_1 = 1 - 2\sqrt{6}, x_2 = 1 + 2\sqrt{6}$, где $x_1 \approx -3,8, x_2 \approx 4,8$

Обозначим $t = \log_{2x+9}(24 + 2x - x^2)$, тогда неравенство примет вид $t + \frac{2}{t} \leq 3$ или $\frac{(t-1)(t-2)}{t} \leq 0$, откуда следует, что либо $t < 0$ либо $1 \leq t \leq 2$

а) Пусть $t < 0$, т.е.

$$\log_{2x+9}(24 + 2x - x^2) < 0 \quad (9)$$

Если $x \in E$, то $2x + 9 > 1$ и неравенство (9) на множестве E равносильно неравенству $24 + 2x - x^2 < 1$ или

$$(x - x_1)(x - x_2) > 0$$

Поэтому множество решений неравенства (9) — объединение интервалов $(-4, x_1)$ и $(x_2, 6)$

б) Пусть $1 \leq t \leq 2$, т.е.

$$1 \leq \log_{2x+9}(24 + 2x - x^2) \leq 2 \quad (10)$$

Так как $2x + 9 > 1$ на множестве E , то неравенство (10) равносильно неравенству

$$2x + 9 \leq 24 + 2x - x^2 \leq (2x + 9)^2,$$

которое равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 5x^2 + 34x + 57 = 5(x + 3)\left(x + \frac{19}{5}\right) \geq 0, \\ x^2 \leq 15 \end{cases} \quad (11)$$

(12)

Множество решений неравенства (11) — объединение промежутков $x \leq -3$ и $x \geq -\frac{19}{5}$, а множество решений неравенства (12) — отрезок $[-\sqrt{15}, \sqrt{15}]$, где $x_1 < -\sqrt{15} < -\frac{19}{5} < -3 < \sqrt{15} < x_2$ (см. рис.). Следовательно, множество решений нера-



к задаче 3

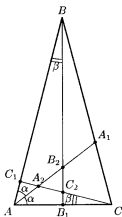
венства (10) состоит из отрезков $[-\sqrt{15}, -\frac{19}{5}]$ и $[-3, \sqrt{15}]$

4. 1) $\frac{\sqrt{15}}{10}$, 2) $\frac{\sqrt{15}}{30}$

Решение Пусть $A_2B_2C_2$ — треугольник, образованный пересечением прямых AA_1 , BB_1 и CC_1 (см. рис.), $\angle BAA_1 = \angle CAA_1 = \alpha$, $\angle ABB_1 = \beta$. Тогда $\angle B_1BC = \angle C_1CA = \beta$

$$\sin \beta = \cos 2\alpha = \frac{1}{4}, \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{15}}{4},$$

$$AC_1 = AC \sin \beta = \frac{1}{2}, \quad AA_2 = \frac{AC_1}{\cos \alpha} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$



к задаче 4

$$5. \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Решение Складывая первое неравенство со вторым, умноженным на 2, находим $x^2 - 6xy + 9y^2 + 6(x - 3y) + 9 \leq 0$, или $[(x - 3y) + 3]^2 \leq 0$, откуда $x - 3y + 3 = 0$. Подставляя $x = 3y - 3$ в исходную систему, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 9y^2 - 18y + 9 + 9y^2 - 18y \leq 0, \\ 6y - 6 + 3 - 2(3y - 3)y \leq 0, \end{cases}$$

которую можно записать в виде

$$\begin{cases} 2y^2 - 4y + 1 \leq 0, \\ 2y^2 - 4y + 1 \geq 0, \end{cases}$$

откуда следует, что $2y^2 - 4y + 1 = 0$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} x = 3y - 3, \\ 2y^2 - 4y + 1 = 0, \end{cases}$$

найдем два ее решения, которые являются решениями исходной системы неравенств

1) Если S_1 — площадь треугольника

$$AA_2C, \text{ то } S_1 = \frac{1}{2} AA_2 \cdot AC \sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{10}$$

2) Если S_2 — площадь треугольника

$$A_2B_2C_2, \text{ то } S_2 = \frac{1}{2} A_2B_2 \cdot A_2C_2 \sin \varphi,$$

где $\varphi = \angle B_2A_2C_2 = \angle C_1A_2A = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и

поэтому $\sin \varphi = \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$. Так как

$$A_2B_2 = AB_2 - AA_2 = \frac{AB_1}{\cos \alpha} - \frac{AC_1}{\cos \alpha} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{5}}, \quad A_2C_2 = CC_1 - C_1A_2 - CC_2 =$$

$$= AC \cos \beta - AA_2 \sin \alpha - \frac{B_1C}{\cos \beta} = \frac{2}{\sqrt{15}},$$

$$\text{то } S_2 = \frac{\sqrt{15}}{30}$$

$$6. R \geq \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right) r, \quad \frac{R \left(R + r - \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}} \right)}{r + \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}} - R}$$

Решение Пусть O_k — центр k -го шара радиуса r ($k = 1, 2, 3$), A — центр треугольника $O_1O_2O_3$, B — точка касания шара радиуса R с одним из трех одинаковых шаров r (например, с первым), C — центр шара радиуса R , O — центр шара, касающегося всех четырех шаров (см. рис.), x — его радиус. Тогда $O_1A = \frac{2r}{\sqrt{3}}$, $O_1C = r + R$, $OC = R + x$, $OO_1 = r + x$. Точки C и O должны лежать на перпендикуляре к плоскости $O_1O_2O_3$, проведенном через точку A .

Чтобы шар радиуса R касался трех равных шаров радиуса r , должно выполняться условие $O_1C \geq O_1A$, т.е. $R + r \geq \frac{2r}{\sqrt{3}}$

$$\text{или } R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3} \geq 0$$

Обозначим $\alpha = \angle O_1CA$, тогда $\sin \alpha = \frac{2r}{\sqrt{3}(R+r)}$, $\cos \alpha =$

$$= \sqrt{1 - \frac{4r^2}{3(R+r)^2}} = \frac{b}{R+r}, \text{ где}$$

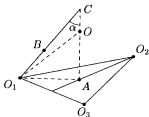
$$b = \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}}$$

Применяя теорему косинусов в треугольнике O_1CO , получаем

$$O_1O^2 = CO^2 + CO^2 - 2 CO_1 CO \cos \alpha, \text{ т.е.}$$

$$(r+x)^2 = (R+r)^2 + (R+x)^2 - 2(R+r)(R+x) \frac{b}{R+r},$$

$$\text{откуда } x = \frac{R(R+r-b)}{r+b-R}$$



к задаче 6

БИЛЕТ 6

1. $x_1 = 6, x_2 = -2$

2. $x = \frac{\pi}{7} + \pi n, x = \frac{3\pi}{7} + \pi n, x = \frac{5\pi}{7} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$3. -11 < x < -1 - 3\sqrt{11}, -\sqrt{79} \leq x \leq 7, \frac{43}{5} \leq x \leq \sqrt{79}, -1 + 3\sqrt{11} < x < 9$$

$$4. \frac{3\sqrt{35}}{7}, \frac{4\sqrt{35}}{105}$$

$$5. \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1 - \sqrt{2}\right), \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1 + \sqrt{2}\right)$$

$$6. R \geq r \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \frac{R \left(R - r - \sqrt{R^2 - 2Rr - \frac{r^2}{3}}\right)}{r - \sqrt{R^2 - 2Rr - \frac{r^2}{3}} + R}$$

БИЛЕТ 7

$$1. x_1 = -3, x_2 = 9$$

$$2. x = \frac{\pi}{2} + \pi n, x = -\frac{3\pi}{10} + \pi n, x = \frac{\pi}{10} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3. -2 < x < \frac{1 - \sqrt{21}}{2}, -\sqrt{3} \leq x \leq -\frac{3}{2}, -1 \leq x \leq \sqrt{3}, \frac{1 + \sqrt{21}}{2} < x < 3$$

$$4. \frac{\sqrt{15}}{3}, \frac{4\sqrt{15}}{45}$$

$$5. \left(-1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{2}\right), \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}\right)$$

$$6. R \geq r \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right), \frac{R \left(R + r + \sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}}\right)}{\sqrt{R^2 + 2Rr - \frac{r^2}{3}} + R - r}$$

БИЛЕТ 8

$$1. x_1 = -6, x_2 = 10$$

$$2. x = -\frac{3\pi}{14} + \pi n, x = \frac{\pi}{14} + \pi n, x = \frac{5\pi}{14} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3. -\frac{11}{2} < x < -\frac{1}{2} - 2\sqrt{6}, -\frac{\sqrt{73}}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}, \frac{7}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{73}}{2}, -\frac{1}{2} + 2\sqrt{6} < x < \frac{9}{2}$$

$$4. \frac{3\sqrt{35}}{7}, \frac{4\sqrt{35}}{105}$$

5. $(-1 + \sqrt{2}, -3\sqrt{2}), (-1 - \sqrt{2}, 3\sqrt{2})$

6. $R \geq r \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right), \frac{R \left(R - r + \sqrt{R^2 - 2Rr - \frac{r^2}{3}}\right)}{r + R + \sqrt{R^2 - 2Rr - \frac{r^2}{3}}}$

БИЛЕТ 9

1. $x \leq -3, -2 \leq x < \frac{-7 + \sqrt{13}}{6}$

Решение Область допустимых значений неравенства определяется условием $x^2 + 5x + 6 \geq 0$, откуда

$$x \leq -3, \quad x \geq -2 \quad (13)$$

На множестве (13) исходное неравенство равносильно каждому из неравенств

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &< 1 + 2\sqrt{x^2 + x + 1} + x^2 + x + 1, \\ 2(x + 1) &< \sqrt{x^2 + x + 1} \end{aligned} \quad (14)$$

Если $x \leq -1$ и выполняются условия (13), то неравенство (14) является верным, и поэтому значения x из промежутков $x \leq -3$ и $-2 \leq x \leq -1$ — решения исходного неравенства

Если левая часть (14) положительна и выполняются условия (13), т.е. $x > -1$, то неравенство (14) равносильно каждому из неравенств $4(x^2 + 2x + 1) < x^2 + x + 1$,

$$3x^2 + 7x + 3 < 0 \quad (15)$$

Так как уравнение $3x^2 + 7x + 3 = 0$ имеет корни $x_1 = \frac{-7 - \sqrt{13}}{6}$,

$x_2 = \frac{-7 + \sqrt{13}}{6}$, где $x_1 < -1$, $x_2 > -1$, то решения неравенства (15), удовлетворяющие условию $x > -1$, образуют интервал $-1 < x < x_2$

2. $x = -\arctg \frac{1}{2} + \pi n, x = -\arctg \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Решение Преобразуем левую часть уравнения, пользуясь тем, что

$$\cos 4x + \cos 2x = 2 \cos 3x \cos x, \quad \cos 3x + \cos x = 2 \cos 2x \cos x,$$

$$\sin 4x - \sin 2x = 2 \cos 3x \sin x, \quad \sin 3x - \sin x = 2 \cos 2x \sin x$$

Получим

$$\frac{2 \cos x (\cos 3x + \cos 2x)}{2 \sin x (\cos 3x + \cos 2x)}$$

При преобразовании правой части уравнения воспользуемся формулами

$$1 - 2 \sin^2 x = \cos 2x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x),$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos x - \sin x)$$

Область допустимых значений уравнения определяется условиями

$$\begin{aligned} \cos 3x + \cos 2x &= 2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{5x}{2} \neq 0, \\ \sin x &\neq 0, \quad \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \neq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

а) Если $\cos 2x \geq 0$ и выполняются условия (16), то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \cos x &= 2 \cos x + 2 \sin x, \text{ откуда } \operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}, \\ x &= -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (17)$$

Значения x , определяемые формулой (17), удовлетворяют условию $\cos 2x \geq 0$ и являются решениями исходного уравнения

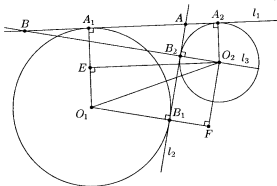
б) Если $\cos 2x < 0$ и выполняются условия (16), то исходное уравнение равносильно уравнению

$$\begin{aligned} \cos x &= -2(\cos x + \sin x), \text{ откуда } \operatorname{tg} x = -\frac{3}{2}, \\ x &= -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Эти значения x также являются решениями исходного уравнения

3. $A_1A_2 = 8$, $B_1B_2 = 4$, $AB_2 = 2$, $AB = 10$, $BB_2 = 4\sqrt{6}$

Решение Пусть E и F — проекции точки O_2 на прямые O_1A_1 и O_1B_1 соответственно (см. рис.), $O_1A_1 = O_1B_1 = R$, $O_2A_2 = O_2B_2 = r$, $O_1O_2 = l$. Тогда $O_1E = R - r$, $O_1F = R + r$ и из прямоугольных треугольников O_1EO_2 и O_1FO_2



к задаче 3

находим $A_1A_2 = \sqrt{l^2 - (R - r)^2} = \sqrt{70 - (\sqrt{6})^2} = 8$, $B_1B_2 = \sqrt{l^2 - (R + r)^2} = \sqrt{70 - (3\sqrt{6})^2} = 4$. Обозначим $BB_2 = a$, $AB_2 = b$, $AB = c$. По свойству касательных имеем $AA_1 = AB_1$, $AB_2 = AA_2$, откуда $A_1A_2 - b = B_1B_2 + b$, $8 - b = 4 + b$, $b = 2$. Из подобия треугольников A_2BO_2 и B_2AB следует что $\frac{O_2A_2}{BA_2} = \frac{AB_2}{BB_2}$, т.е. $\frac{r}{c + b} = \frac{b}{a}$, откуда $c + 2 = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

По свойству касательной и секущей, проведенных к окружности C_2 из точки B , имеем

$$a(a + 2r) = (c + 2)^2 = \frac{3}{2}a^2, \text{ откуда } a = 4\sqrt{6}, \quad c = 10$$

4. 1) $\frac{14}{9} \sqrt{\frac{5}{3}}$, 2) $\frac{4}{3\sqrt{5}}$, 3) $\arcsin \frac{3}{5}$

Решение Пусть O — центр основания $ABCD$, Q и T — проекции точек S и O на плоскость EFK , L — проекция точки K на плоскость $ABCD$ (см. рис.). Так как $EF \parallel BD$ то плоскость EFK пересечет плоскость SBD по прямой MN ($M \in SB$, $N \in SD$), параллельной BD , а в сечении образуется пятиугольник $EMKNF$, составленный из равнобедренной трапеции $EMNF$ ($EM = NF$) и равнобедренного треуголь-

Так как прямая BD параллельна плоскости EFK , то $OT = d$, где $OT = OP \sin \beta = \frac{4}{3\sqrt{5}}$

5. $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < a \leq 2$

Решение Исходное уравнение равносильно уравнению

$$\log_5(x + \sqrt{2-a}) = \log_5(a-1-x) + \log_5 3, \quad (18)$$

а уравнение (18) равносильно системе

$$\begin{cases} x + \sqrt{2-a} = 3(a-1-x), \\ a-1 > x, \end{cases}$$

откуда следует неравенство

$$1-a < \sqrt{2-a} \quad (19)$$

Для решения неравенства (19) построим графики функций

$$y = 1-a \quad \text{и} \quad y = \sqrt{2-a}$$

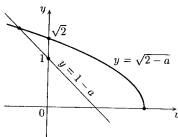
(см. рис.) Из рисунка видно, что множество решений неравенства (19) — промежуток $(a_1, 2]$, где a_1 — корень уравнения

$$1-a = \sqrt{2-a} \quad (20)$$

такой, что $a_1 < 0$

Из (20) следует, что $(1-a)^2 = 2-a$ или $a^2 - a - 1 = 0$,

откуда $a_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$



к задаче 5

6. $(0, 0, 0), \left(\frac{5}{2}, -5, -\frac{15}{2}\right) (7, -7, -7)$

Решение Вычитая из второго уравнения умноженного на два, первое и третье, получаем

$$y(z - x - 2y) = 0 \quad (21)$$

Уравнение (21) вместе с первыми двумя уравнениями данной системы образует систему, равносильную данной. Из (21) следует, что либо $y = 0$, либо

$$z = x + 2y \quad (22)$$

Если $y = 0$, то $x = 0$, $z = 0$ и $(0, 0, 0)$ — решение исходной системы

Если справедливо равенство (22), то из первых двух уравнений исходной системы получаем

$$\begin{cases} 9x + 2y + xy = 0, \\ 4x - 3y - y^2 = 0 \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} 9x + 2y + xy = 0, \\ 4x - 3y - y^2 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

Вычитая из уравнения (23), умноженного на 4, уравнение (24), умноженное на 9, находим

$$35y + 4xy + 9y^2 = y(4x + 9y + 35) = 0, \text{ откуда} \quad 4x = -9y - 35 \quad (25)$$

Из (24) и (25) следует, что $y^2 + 12y + 35 = 0$, откуда

$$y_1 = -5, \quad y_2 = -7$$

Если $y = -5$, то из (25) и (22) находим $x = \frac{5}{2}$, $z = -\frac{15}{2}$, а если $y = -7$, то $x = 7$, $z = -7$

БИЛЕТ 10

1. $x \leq -3$, $-1 \leq x < \frac{-1 + \sqrt{17}}{8}$

2. $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $A_1A_2 = 7$, $B_1B_2 = 5$, $AB_1 = 6$, $AB = 12$, $BB_1 = 6\sqrt{3}$

4. 1) $\frac{25}{27}$, 2) $\frac{2\sqrt{2}}{15}$ 3) $\arcsin \frac{12}{5\sqrt{17}}$

5. $\frac{3 - \sqrt{13}}{2} < a \leq 5$

6. $(0, 0, 0)$, $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -1)$, $(-\frac{5}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{2})$

БИЛЕТ 11

1. $\frac{7 - \sqrt{13}}{6} < x \leq 2$, $x \geq 3$

2. $x = -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n$, $x = -\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $A_1A_2 = 8$, $B_1B_2 = 4$, $AB_1 = 2$, $AB = \frac{14}{5}$, $BB_1 = \frac{4\sqrt{6}}{5}$

4. 1) $\frac{5}{3}$, 2) $\frac{2}{5}$, 3) $\arcsin \frac{12}{5\sqrt{10}}$

5. $-\frac{3+\sqrt{17}}{2} < a \leq 3$

6. $(0, 0, 0)$, $(4, 12, -4)$, $(1, 6, -4)$

БИЛЕТ 12

1. $\frac{1-\sqrt{17}}{8} < x \leq 1$, $x \geq 3$

2. $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 2 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

3. $A_1A_2 = 7$, $B_1B_2 = 5$, $BB_2 = \frac{24\sqrt{3}}{11}$, $AB = \frac{78}{11}$, $AB_2 = 6$

4. 1) $\frac{4}{\sqrt{3}}$, 2) $\frac{2}{3\sqrt{3}}$, 3) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{3}$

5. $-5 < a \leq 4$

6. $(0, 0, 0)$, $\left(-\frac{4}{3}, -2, \frac{2}{3}\right)$, $\left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$